von einem beliebigen Punkt p und von einem Randpunkt σ ab, so daß $H(\sigma s)$ als von zwei Randpunkten σ, s abhängig wohl als noch einfacher zu bezeichnen ist. Wie wir gesehen haben, hängt die Funktion $H(\sigma s)$ auch vom Parameter λ ab und wenn es darauf ankommt, diese Abhängigkeit hervortreten zu lassen, so wird man $H(\sigma s)$ in der Form $H_\lambda(\sigma s)$ schreiben können.

Die beiden für uns vornehmlich wichtigen Probleme entsprechen den Parameterwerten $\lambda = \pm 1$. Es hat sich herausgestellt, daß $\lambda = -1$ ein Pol der Funktion $H(\sigma s)$ ist, so daß für diesen gerade sehr wichtigen Fall die obige Lösung versagt. Dieses aber erkannten wir als sehr natürlich, da das Potential W der Doppelschicht im Außengebiet eine von Null verschiedene Konstante nicht darstellen kann.

Dem polaren Unendlichwerden von $H(\sigma s)$ gaben wir die Gestalt (35) S. 56

$$H(\sigma s) = \frac{\mathfrak{m}'(\sigma)}{\lambda + 1} + \mathfrak{H}(\sigma s),$$

wo $\mathfrak{H}(\sigma s)$ für $\lambda = -1$ schon regulär ist.

Durch Multiplikation der ersten Integralgleichung für $H(\sigma s)$ S. 75 mit $d\sigma$ und Integration über die Berandung folgt wegen $\int h(\sigma s)d\sigma = 1$

$$(1 + \lambda)\int H(\sigma s)d\sigma = 1.$$

Daraus findet man durch Einsetzen von (35) die beiden Gleichungen

$$\int \mathfrak{m}'(\sigma)d\sigma = 1$$
$$\int \mathfrak{H}(\sigma s)d\sigma = 0.$$

Führt man den obigen Ausdruck (35) für $H(\sigma s)$ in die Integralgleichungen für $H(\sigma s)$ [(30) S. 51 oder S. 75] ein, so bekommt man einerseits für $\mathfrak{m}'(s)$ die homogene Integralgleichung

$$\mathfrak{m}'(\sigma) = \int h(\sigma\theta)\mathfrak{m}'(\theta)d\theta$$

anderseits für $\mathfrak{H}(\sigma s)$ die Integralgleichungen

$$\mathfrak{H}(\sigma s) + \lambda\int h(\sigma\theta)\mathfrak{H}(\theta s)d\theta = h(\sigma s) - \mathfrak{m}'(\sigma)$$
$$(61) \qquad \mathfrak{H}(\sigma s) + \lambda\int \mathfrak{H}(\sigma\theta)h(\theta s)d\theta = h(\sigma s) - \mathfrak{m}'(\sigma),$$

von denen jede die Reihenentwicklung liefert

$$\mathfrak{H}(\sigma s) = [h(\sigma s) - \mathfrak{m}'(\sigma)] - \lambda[h_1(\sigma s) - \mathfrak{m}'(\sigma)] + \lambda^2[h_2(\sigma s) - \mathfrak{m}'(\sigma)] - \cdots$$

die wir auch auf S. 59 hergeleitet haben.

Nach dieser Vorbereitung gehen wir zu den Spezialfällen $\lambda = \pm 1$ wieder zurück. Der Wert $\lambda = +1$ ist kein singulärer und man kann in diesem Falle unmittelbar $\lambda = +1$ in die Lösung W einsetzen. Setzt man zunächst in (45) S. 58 für $H(\sigma s)$ die Darstellung $H(\sigma\theta) = \frac{\mathfrak{m}'(\sigma)}{\lambda + 1} + \mathfrak{H}(\sigma\theta)$ ein, so ergibt sich für den Beitrag, welcher vom $\frac{\mathfrak{m}'(\sigma)}{\lambda + 1}$ herrührt, der Betrag

$$-\frac{\lambda}{(\lambda + 1)}\int f(\sigma)\mathfrak{m}'(\sigma)$$

zur Belegung $\nu(s)$ des Potentiales $W(p)$ der Doppelschicht. Man sieht also, daß sich die Belegung $\nu(s)$ auch für $\lim \lambda = -1$ endlich ergibt, wenn $\int f(\sigma)\mathfrak{m}'(\sigma)d\sigma = 0$ ist, d. h. wenn die Neumannsche Konstante der Randfunktion $f(s)$ Null ist. Diesen Fall können wir aber stets herbeiführen. Wenn nämlich $\int f(\sigma)\mathfrak{m}'(\sigma)d\sigma$ nicht Null wäre, so führt die Funktion

$$f(s) - \int f(\sigma)\mathfrak{m}'(\sigma)d\sigma$$

auf die Neumannsche Konstante $= 0$. Dies erkennt man gleich durch Multiplikation dieser Funktion mit $\mathfrak{m}'(s)ds$ und Integration wegen $\int \mathfrak{m}'(s)ds = 1$. Wäre also auch das Neumann-Poincarésche Problem für $\lambda = -1$ bei Vorgabe der Randfunktion $f(s)$ durch ein Potential W nicht lösbar, so ist es sicher, wenn statt $f(s)$ die Randwerte

$$f(s) - \int f(\sigma)\mathfrak{m}'(\sigma)d\sigma = f(s) - N$$

vorgeschrieben werden. Wir haben also in diesem Falle eine Lösung W von

$$(1+\lambda)W(s^+) - (1-\lambda)W(s^-) = 2\lambda[f(s) - \int f(\sigma)\mathfrak{m}'(\sigma)d\sigma]$$

selbst für $\lambda = -1$.

Wenn die Neumannsche Konstante Null ist, so fällt in W [s. (33) S. 51] das unendlich werdende Glied weg, d. h. man kann dann statt $H(\sigma s)$ ohne weiteres $\mathfrak{H}(\sigma s)$ einsetzen. Das Potential W hätte hier also die Gestalt:

$$W(p) = \frac{\lambda}{\pi}\int [f(\sigma) - N]\left\{\frac{d}{d\sigma}\operatorname{arctg}\frac{y_\sigma - y}{x_\sigma - x} - \lambda\int \mathfrak{H}(\sigma\theta)\frac{d}{d\theta}\operatorname{arctg}\frac{y_\theta - y}{x_\theta - x}d\theta\right\}d\sigma$$

Nun ist $\int \mathfrak{H}(\sigma\theta)d\sigma = 0$ und für alle Außenpunkte des Gebietes nach (15) S. 19 $\int \frac{d}{d\sigma}\operatorname{arctg}\frac{y_\sigma - y}{x_\sigma - x}d\sigma = 0$, so daß in W für alle Außenpunkte die Konstante N einflußlos ist, also weggelassen werden kann. Man bekommt, da dem Parameter $\lambda = -1$ das Problem $W(s^-) = f(s) - \int f(\sigma)\mathfrak{m}'(\sigma)d\sigma$ entspricht, in $W(p)$ also ein Potential der Doppelschicht, welches am Außenrande die Werte $f(s)$ nur bis auf die additive Konstante $N = \int f(\sigma)\mathfrak{m}'(\sigma)d\sigma$ darstellt. Addiert man also zu W diese Konstannte, so bekommt man ein Potential $U(p) = N + W(p)$, welches genau die Randwerte $U(s^-) = f(s)$ besitzt. Für $\lambda = +1$ ist das Problem unmittelbar lösbar. Setzt man $H(\sigma\theta) = \frac{\mathfrak{m}'(\sigma)}{\lambda+1} + \mathfrak{H}(\sigma\theta)$ ein, so hat, weil für alle Innenpunkte $\int \frac{d}{d\theta}\operatorname{arctg}\frac{y_\theta - y}{x_\theta - x}d\theta = 2\pi$ ist, der Beitrag des Gliedes $\frac{\mathfrak{m}'(\sigma)}{\lambda+1}$ den Wert

$$-\int f(\sigma)\mathfrak{m}'(\sigma)d\sigma.$$

Wir können unter Berücksichtigung dieser Verhältnisse die Lösung $U(p)$ in der Gestalt angeben:

Sind irgendwelche Randwerte $f(s)$ gegeben, so nimmt das Potential des Innengebietes

$$(62\,\mathrm{a})\quad U(p) = \int \left\{ \frac{d}{d\sigma} \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y_\sigma - y}{x_\sigma - x} - \mathfrak{m}'(\sigma) - \int \mathfrak{H}_{+1}(\sigma\theta) \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y_\theta - y}{x_\theta - x} \right) d\theta \right\} f(\sigma)\, d\sigma$$

am Innenrande, das Potential des Außengebietes

$$(62\,\mathrm{b})\quad U(p) = -\int \left\{ \frac{d}{d\sigma} \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y_\sigma - y}{x_\sigma - x} - \mathfrak{m}'(\sigma) - \int \mathfrak{H}_{-1}(\sigma\theta) \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y_\theta - y}{x_\theta - x} \right) d\theta \right\} f(\sigma)\, d\sigma$$

am Außenrande der gegebenen Randkurve die Werte $f(s)$ an.

Diese beiden Darstellungen geben die Verallgemeinerung der Poissonschen Formel für beliebige geschlossene Kurven.

[Es läßt sich leicht zeigen, daß, wie beim Poissonschen Integral, die Klammergröße $\{\,\}$ in (62) verschwindet und zwar die erste am Innenrande, die zweite am Außenrande. Um dies zu zeigen, hat man z. B. den Wert von

$$\frac{1}{\pi} \int \mathfrak{H}_{+1}(\sigma\theta) \frac{d}{d\theta} \operatorname{arctg} \frac{y_\theta - y}{x_\theta - x}\, d\theta$$

am Innenrande zu suchen. Dieser Ausdruck ist nun ein Potential der Doppelschicht mit der Belegung $\frac{1}{\pi}\, \mathfrak{H}_{+1}(\sigma\theta)$ im Randpunkte θ. Die Randwerte der Potentiale W sind aber durch den Satz (A_2) S. 22 bestimmt. Mit Rücksicht darauf ergibt sich unmittelbar das Verschwinden des Klammerausdruckes.]

Die Gleichungen (62a) und (62b) zeigen, daß die wesentliche Aufgabe zur Lösung der beiden Randwertprobleme darin besteht, die beiden Randfunktionen $\mathfrak{H}_{+1}(\sigma s)$ und $\mathfrak{H}_{-1}(\sigma s)$ zu bestimmen. K. Neumann hat nun den Gedanken ausgesprochen, ob es denn nicht schon möglich wäre, mit einer einzigen Randfunktion für die Lösung beider Randwertaufgaben, d. h. sowohl im Innengebiete als im Außengebiete auszukommen. Das neue Problem könnte man etwa folgendermaßen präzisieren:

Existiert bei einem gegebenen, etwa einfach zusammenhängenden, Bereich eine derartige Funktion des Gebietes, daß sich bei beliebig gegebenen Randwerten sowohl das Potential des Innengebietes mit diesen Randwerten als jenes Potential, welches am Außenrand diese Werte annimmt, durch solche Quadraturen in endlicher Anzahl ergibt, die nur unmittelbar bekannte Funktionen, die in Frage stehende Randfunktion und die gegebenen Randwerte enthalten? In diese Worte könnte man in allgemeinerer Form den K. Neumannschen Gedanken einkleiden.

§ 32.

Die Lösung der Randwertaufgaben verlangt, wie eben gezeigt, nur die Bestimmung der beiden Randfunktionen $\mathfrak{H}_{+1}(\sigma s)$ und $\mathfrak{H}_{-1}(\sigma s)$. Gelingt es uns zwischen diesen Funktionen einen solchen Zusammenhang zu finden, daß die eine aus der anderen oder beide aus einer dritten durch Quadraturen hervorgehen, so wird dies als eine Beantwortung der obigen Fragestellung erscheinen. Dies ist in der Tat möglich. Die bisherigen Ergebnisse sind ohne methodische Änderung der Herleitung auch beim Newtonschen Potentiale gültig, so bestehen insbesondere die Gleichungen (62a) und (62b) in analoger Form beim Newtonschen Potential.

Ich zeige zunächst zwischen $\mathfrak{H}_{+1}(\sigma s)$ und $\mathfrak{H}_{-1}(\sigma s)$ einen Zusammenhang, der für beide Potentialarten gleichmäßig gilt.

Die Integralgleichungen für $\mathfrak{H}_{+1}(\sigma s)$ und $\mathfrak{H}_{-1}(\sigma s)$ lauteten ($\lambda = +1$ und $\lambda = -1$ in (61))

$$\mathfrak{H}_{+1}(\sigma s) + \int h(\sigma\theta)\mathfrak{H}_{+1}(\theta s)\,d\theta = h(\sigma s) - \mathfrak{m}'(\sigma),$$
$$\mathfrak{H}_{-1}(\sigma s) - \int h(\sigma\theta)\mathfrak{H}_{-1}(\theta s)\,d\theta = h(\sigma s) - \mathfrak{m}'(\sigma).$$

Setzt man

$$\mathfrak{H}_{+1}(\sigma s) + \mathfrak{H}_{-1}(\sigma s) = 2\mathfrak{K}(\sigma s)$$
$$(63)\qquad \mathfrak{H}_{+1}(\sigma s) - \mathfrak{H}_{-1}(\sigma s) = 2\mathfrak{K}_1(\sigma s)$$

so bekommt man aus den vorangehenden Gleichungen durch Addition bzw. Subtraktion

$$\mathfrak{K}(\sigma s) + \int h(\sigma\theta)\mathfrak{K}_1(\theta s)\,d\theta = h(\sigma s) - \mathfrak{m}'(\sigma)$$
$$(64)\qquad \mathfrak{K}_1(\sigma s) - \int h(\sigma\theta)\mathfrak{K}(\theta s)\,d\theta = 0.$$

Damit haben wir schon eine Beantwortung der Frage. *Wir können nämlich sagen, daß die Kenntnis der Randfunktion $\mathfrak{K}(\sigma s)$ ausreichend ist zur Bestimmung beider Funktionen $\mathfrak{H}_{+1}(\sigma s)$ und $\mathfrak{H}_{-1}(\sigma s)$.* Aus der zweiten der zwei letzten Gleichungen ergibt sich aus $\mathfrak{K}(\sigma s)$ durch eine Quadratur $\mathfrak{K}_1(\sigma s)$, womit dann schon beide Funktionen $\mathfrak{H}$ bekannt sind, denn es ist ja

$$\mathfrak{H}_{+1}(\sigma s) = \mathfrak{K}(\sigma s) + \mathfrak{K}_1(\sigma s) = \mathfrak{K}(\sigma s) + \int h(\sigma\theta)\mathfrak{K}(\theta s)\,d\theta$$
$$(65)\qquad \mathfrak{H}_{-1}(\sigma s) = \mathfrak{K}(\sigma s) - \mathfrak{K}_1(\sigma s) = \mathfrak{K}(\sigma s) - \int h(\sigma\theta)\mathfrak{K}(\theta s)\,d\theta.$$

Führt man diese Ausdrücke in die beiden Potentiale $U(p)$ ein, so bekommt man für die Lösung eine Darstellung Greenscher Art, wobei der unter dem Integralzeichen stehende Faktor von $f(s)$ eine Funktion ist, die aus der Randfunktion $\mathfrak{K}(\sigma s)$ in einfacher Weise sich ergibt. Wir sind nun auch imstande die Funktion $\mathfrak{K}(\sigma s)$ selbst anzugeben. Sie genügt, wie aus (64) folgt, der Integralgleichung

$$(66)\qquad \mathfrak{K}(\sigma s) + \int h_1(\sigma\theta)\mathfrak{K}(\theta s)\,d\theta = h(\sigma s) - \mathfrak{m}'(\sigma),$$

worin, wie bisher, abkürzend gesetzt worden ist:

$$h_1(\sigma\theta) = \int h(\sigma\tau)h(\tau\theta)\,d\tau.$$

Man kann daraus, aber auch direkt aus den Reihen (50) S. 59

$$\mathfrak{H}_{+1}(\sigma s) = [h(\sigma s) - \mathfrak{m}'(\sigma)] - [h_1(\sigma s) - \mathfrak{m}'(\sigma)] + [h_2(\sigma s) - \mathfrak{m}'(\sigma)] - \cdots$$
$$\mathfrak{H}_{-1}(\sigma s) = [h(\sigma s) - \mathfrak{m}'(\sigma)] + [h_1(\sigma s) - \mathfrak{m}'(\sigma)] + [h_2(\sigma s) - \mathfrak{m}'(\sigma)] - \cdots$$

durch Addition die konvergente Entwicklung für $\mathfrak{K}(\sigma s)$ herleiten:

$$\mathfrak{K}(\sigma s) = [h(\sigma s) - \mathfrak{m}'(\sigma)] + [h_2(\sigma s) - \mathfrak{m}'(\sigma)] + [h_4(\sigma s) - \mathfrak{m}'(\sigma)] + \cdots.$$

Analog bekäme man für $\mathfrak{K}_1(\sigma s)$ die Reihe

$$\mathfrak{K}_1(\sigma s) = [h_1(\sigma s) - \mathfrak{m}'(\sigma)] + [h_3(\sigma s) - \mathfrak{m}'(\sigma)] + [h_5(\sigma s) - \mathfrak{m}'(\sigma)] + \cdots.$$

Diese Reihe geht aus der vorhergehenden durch gliedweise Ausführung der Neumannschen Operation hervor.

Das Ergebnis kann man übrigens direkt aus den Neumannschen Reihen ablesen. Für die Herstellung der Neumannschen Reihen ist oben folgende Vorschrift gegeben worden: Es seien die Randwerte $f(s)$ gegeben. Man bilde sich aus $f(s)$ durch sukzessive Ausübung Neumannscher Operationen die Folge $f(s), f_1(s), f_2(s), f_3(s), \ldots$ Die Folge konvergiert gegen einen Grenzwert N und die beiden Reihen

$$\pm [f(s) - N] - [f_1(s) - N] \pm [f_2(s) - N] - [f_3(s) - N] \pm \cdots$$

sind konvergent. Von diesen Reihen gibt die eine nach Division durch π als Belegung eines Potentials der Doppelschicht genommen ein Potential mit den Randwerten $f(s) - N$ am Innenrande, die zweite am Außenrande. Würde man darin für $f(s)$ die Funktion $h(\sigma s)$ wählen, wobei σ nur als ein Parameter aufgefaßt wird, so gingen die Reihen in jene für $\mathfrak{H}_{+1}(\sigma s)$ und $-\mathfrak{H}_{-1}(\sigma s)$ über. (Die Neumannsche Konstante der Funktion $h(\sigma s)$ ist ja, wie gezeigt, gerade $\mathfrak{m}'(\sigma)$). Faßt man jene Glieder, die einen geraden Index haben, zusammen und jene mit ungeraden Index wieder zu einer Reihe, so bekommt man zwei konvergente Reihen, deren zweite aus der ersten durch eine einmalige Anwendung der K. Neumannschen Operation hervorgeht. Die Kenntnis der einen Reihe genügt also um leicht die Belegungen beider Potentiale zu finden. Wenn man aber, was gestattet ist, in den Neumannschen Funktionen $f_k(s)$ die Integrationsfolge vertauscht, so bekommt man einfach

$$f_{k+1}(s) = \int f(\sigma) h_k(\sigma s) d\sigma$$

und weil die Konvergenzkonstante $N = \int f(\sigma)\mathfrak{m}'(\sigma) d\sigma$ ist, so sieht man, daß die Reihe

$$[f_1(s) - N] + [f_3(s) - N] + [f_5(s) - N] + \cdots$$

geradezu gleich ist dem Integral $\int f(\sigma)\mathfrak{K}(\sigma s) d\sigma$. Die Reihe

$$[f_2(s) - N] + [f_4(s) - N] + [f_6(s) - N] + \cdots$$

ergibt sich aber aus der früheren, also auch aus $\int f(\sigma)\mathfrak{K}(\sigma s) d\sigma$ durch Ausübung einer Neumannschen Operation. Das Auskommen mit einer einzigen Randfunktion $\mathfrak{K}(\sigma s)$ läßt sich also schon dem klassischen Vorgang K. Neumanns entnehmen.

Durch die vorstehende gleichmäßig für beide Potentialarten gültige Entwicklung wurde also in der Tat eine Reduktion des Problemes auf eine einzige zu suchende Randfunktion erreicht. Für den Kreis ist diese Funktion gleich Null, für die Ellipse hat sie auch einen einfachen Wert

$$\mathfrak{K}(\sigma s) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{d}{d\sigma} \log \prod_1^{\infty} \frac{1 - q^{2n-1} \cdot e^{-i(\sigma+s)}}{1 - q^{2n-1} \cdot e^{i(\sigma+s)}}.$$

Die folgende Untersuchung wird uns einen anderen tiefer gehenden Zusammenhang beider Probleme ergeben, der von denkbar einfachster Natur, der aber seine Wurzeln in speziellen Eigenschaften des logarithmischen Potentials hat, also beim Newtonschen Fall nicht mehr vorhanden ist.

Über eine Symmetrieeigenschaft der Randfunktion $\mathfrak{H}(\sigma s)$.

§ 33.

Die Funktion $\mathfrak{H}(\sigma s)$, welche bei der Lösung der Randwertaufgabe im Mittelpunkte steht, war der für $\lim \lambda = -1$ endlich bleibende Teil der Funktion $H(\sigma s)$, die den beiden Integralgleichungen (30) S. 51

$$H(\sigma s) + \lambda \int h(\sigma \theta) H(\theta s) d\theta = h(\sigma s)$$
$$H(\sigma s) + \lambda \int H(\sigma \theta) h(\theta s) d\theta = h(\sigma s)$$

gleichzeitig genügt. Dabei ist

$$h(\sigma s) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{d\sigma} \operatorname{arctg} \frac{y_s - y_\sigma}{x_s - x_\sigma}.$$

Die Funktion $H(\sigma s)$ ist, als Funktion von λ, an der Stelle -1 polar unendlich und zwar von der Form

$$H(\sigma s) = \frac{\mathfrak{m}'(\sigma)}{\lambda + 1} + \mathfrak{H}_\lambda(\sigma s)$$

bei für $\lambda = -1$ endlichem $\mathfrak{H}$. Die Substitution dieses Ausdruckes für $H(\sigma s)$ in die obigen Integralgleichungen gab für $\mathfrak{H}_\lambda(\sigma s)$ die Integralgleichungen (61) S. 76

$$\mathfrak{H}_\lambda(\sigma s) + \lambda \int h(\sigma \theta) \mathfrak{H}_\lambda(\theta s) d\theta = h(\sigma s) - \mathfrak{m}'(\sigma)$$
$$\mathfrak{H}_\lambda(\sigma s) + \lambda \int \mathfrak{H}_\lambda(\sigma \theta) h(\theta s) d\theta = h(\sigma s) - \mathfrak{m}'(\sigma),$$

und man erkennt gleichzeitig auch, daß $\mathfrak{m}'(\sigma)$ der homogenen Integralgleichung (36) S. 56

$$\mathfrak{m}'(\sigma) = \int h(\sigma \theta) \mathfrak{m}'(\theta) d\theta$$

Genüge leistet.

Wir wollen uns nun die Frage aufwerfen, wie sich in $H(\sigma s)$ bzw. $\mathfrak{H}(\sigma s)$ die Eigenschaft von $h(\sigma s)$ widerspiegelt, wonach diese Funktion die Ableitung einer in σ und s symmetrischen Funktion $\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y_s - y_\sigma}{x_s - x_\sigma}$ nach σ ist.

Die Gleichung $\int h(\sigma s) d\sigma = 1$ zeigt, daß $\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y_s - y_\sigma}{x_s - x_\sigma}$, deren Ableitung eben $h(\sigma s)$ ist, keine eindeutige Funktion ist; man sieht übrigens auch schon direkt, daß nach einem einmaligen Umkreisen der Randkurve $\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y_s - y_\sigma}{x_s - x_\sigma}$ um Eins zunimmt. Es liegt nun nahe, da $H(\sigma s)$ für $\lambda = 0$ geradezu in $h(\sigma s)$ übergeht, auch $H(\sigma s)$ als Ableitung einer Funktion nach σ darzustellen. Die Möglichkeit einer einfachen Darstellung zeigt ja die erste der beiden Integralgleichungen (30) S. 51 zur Genüge. Diese neue Funktion wird aber ebensowenig, wie $\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y_s - y_\sigma}{x_s - x_\sigma}$, eindeutig sein können. Die Integration der ersten Gleichung in (30) nach σ über die Randkurve gibt die Gleichung [(61) S. 76]

$$(1 + \lambda) \int H(\sigma s) d\sigma = 1,$$

woraus schon unsere Behauptung über die Nichteindeutigkeit folgt. Setzt man hierin für $H(\sigma s)$ den Ausdruck $\frac{\mathfrak{m}'(\sigma)}{\lambda+1} + \mathfrak{H}_\lambda(\sigma s)$ ein, so bekommt man einerseits $\int \mathfrak{m}'(\sigma)d\sigma = 1$, was wir schon wissen, andererseits folgt noch bei jedem λ

$$\int \mathfrak{H}_\lambda(\sigma s)d\sigma = 0. \tag{67a}$$

Diese Gleichung bekommt man auch direkt durch Integration der ersten Gleichung (61) S. 76 nach σ. *Aus* (67a) *folgt aber, daß* $\mathfrak{H}(\sigma s)$ *als Ableitung einer eindeutigen Funktion von* σ *sich darstellen läßt.*

Die obigen Integralgleichungen für $\mathfrak{H}(\sigma s)$ wollen wir in einer anderen einfacheren Form darstellen. Multipliziert man zunächst die zweite Gleichung mit $\mathfrak{m}'(s)ds$, so ergibt sich durch Integration bei Berücksichtigung der Integraleigenschaft (36) S. 56 des $\mathfrak{m}'(\sigma)$ die Gleichung

$$\int \mathfrak{H}_\lambda(\sigma\theta)\mathfrak{m}'(\theta)d\theta = 0. \tag{67b}$$

Diese Gleichung, sowie (67a) zeigt uns aber, daß man unter dem Integralzeichen in den Integralgleichungen (61) von $h(\sigma\theta)$ und $h(\theta s)$ ohne Einfluß $\mathfrak{m}'(\sigma)$ bzw. $\mathfrak{m}'(\theta)$ subtrahieren darf.

Wir setzen also

$$\mathfrak{h}(\sigma s) = h(\sigma s) - \mathfrak{m}'(\sigma) \tag{68}$$

und bekommen für $\mathfrak{H}_\lambda(\sigma s)$ die Integralgleichungen

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_\lambda(\sigma s) + \lambda \int \mathfrak{h}(\sigma\theta)\mathfrak{H}_\lambda(\theta s)d\theta &= \mathfrak{h}(\sigma s) \\ \mathfrak{H}_\lambda(\sigma s) + \lambda \int \mathfrak{H}_\lambda(\sigma\theta)\mathfrak{h}(\theta s)d\theta &= \mathfrak{h}(\sigma s), \end{aligned} \tag{69}$$

die ganz die Form jener haben, welche für $H(\sigma s)$ gelten, nur daß jetzt die Funktion $h(\sigma s)$ durch $\mathfrak{h}(\sigma s)$ ersetzt erscheint. *Die Funktion* $\mathfrak{h}(\sigma s)$ *hat aber vor* $h(\sigma s)$ *die ausgezeichnete Eigenschaft voraus, bei der Integration über die Berandung* $\int \mathfrak{h}(\sigma s)d\sigma = 0$ *zu geben, mithin die Ableitung einer stetigen und eindeutigen Funktion von* σ *zu sein.* Um diese Funktion zu definieren, zählen wir die Masse der natürlichen Belegung von irgendeinem festen Randpunkte σ_0 aus und setzen

$$\mathfrak{m}(\sigma) = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \mathfrak{m}'(\sigma)d\sigma, \quad \text{d. h.} \quad \mathfrak{m}'(\sigma) = \frac{d\mathfrak{m}(\sigma)}{d\sigma}, \tag{70}$$

so daß also $\mathfrak{m}'(\sigma)$ geradezu die Ableitung einer Funktion $\mathfrak{m}(\sigma)$ nach σ wird. Das letzte Integral ist vom Punkte σ_0 bis σ zu erstrecken, um $\mathfrak{m}(\sigma)$ zu erhalten. Bei der Erstreckung über die ganze Kurve ergibt sich der Betrag Eins, so daß $\mathfrak{m}(\sigma)$ nach einem Umlauf des σ um die Kurve um Eins zunimmt, wie $\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{y_s - y_\sigma}{x_s - x_\sigma}$.

Setzt man

$$\mathfrak{p}(\sigma s) = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{y_\sigma - y_s}{x_\sigma - x_s} - \mathfrak{m}(\sigma) - \mathfrak{m}(s), \tag{71}$$

dann ist $\mathfrak{h}(\sigma s)$ *die Ableitung dieser symmetrischen eindeutigen durchaus endlichen und stetigen Funktion nach* σ, *d. h. es ist* $\mathfrak{h}(\sigma s) = \frac{d}{d\sigma}\,\mathfrak{p}(\sigma s)$.

Wir wollen jetzt auch $\mathfrak{H}(\sigma s)$ als Ableitung einer Funktion nach σ darstellen, setzen also

$$\mathfrak{H}_\lambda(\sigma s) = \frac{d}{d\sigma}\,\mathfrak{P}_\lambda(\sigma s) \tag{72}$$

und wissen im voraus, daß $\mathfrak{P}$ eine allenthalben in σ endliche und stetige Funktion ist, die nach einem Umlauf um die Randkurve den Ausgangswert zurückerlangt. Dies ist eine Folge von $\int \mathfrak{H}_\lambda(\sigma s)\,d\sigma = 0$ bei der Integration über die ganze Randkurve.

Die Integralgleichungen (69) für $\mathfrak{H}(\sigma s)$ zeigen, daß $\mathfrak{P}$ den Integralgleichungen

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_\lambda(\sigma s) + \lambda \int \mathfrak{p}(\sigma\theta)\frac{d}{d\theta}\,\mathfrak{P}_\lambda(\theta s)\cdot d\theta &= \mathfrak{p}(\sigma s) \\ \mathfrak{P}_\lambda(\sigma s) + \lambda \int \mathfrak{P}_\lambda(\sigma\theta)\frac{d}{d\theta}\,\mathfrak{p}(\theta s)\cdot d\theta &= \mathfrak{p}(\sigma s) \end{aligned} \tag{73}$$

genügen wird. Durch die Forderung nämlich, daß $\mathfrak{P}(\sigma s)$ bei der Differentiation nach σ die Funktion $\mathfrak{H}(\sigma s)$ gibt, ist $\mathfrak{P}(\sigma s)$ noch nicht eindeutig, sondern nur bis auf eine additive von σ nicht abhängige Größe festgelegt, so daß man in der ersten dieser Integralgleichungen noch eine von σ unabhängige Größe additiv hinzufügen könnte. Hat man sich für die obige Gleichung entschlossen, dann ist $\mathfrak{P}(\sigma s)$ unzweideutig festgelegt. Daraufhin ist aber die zweite der Integralgleichungen schon von selbst erfüllt. Dies zeigt man, wenn man die erste der Gleichungen (73) mit $\mathfrak{h}(s\tau)ds$ multipliziert und integriert. Infolge der zweiten Integralgleichung (69), der die Funktion $\frac{d}{d\theta}\,\mathfrak{P}(\theta s)$ d. h. $\mathfrak{H}(\theta s)$ genügt, bekommt man durch einfache Zusammenziehung $\int \mathfrak{P}(\sigma s)\mathfrak{h}(s\tau)ds = \int \mathfrak{p}(\sigma s)\frac{d}{ds}\,\mathfrak{P}(s\tau)ds$, also das Bestehen der zweiten Gleichung in (73). Die beiden Integralgleichungen (73) werden also gleichzeitig erfüllt.

Es hindert nun nichts in den Gleichungen (73) die Integration per partes vorzunehmen; die Funktionen unter dem Integralzeichen sind durchaus endlich und stetig. Der ausintegrierte Teil z. B. $\mathfrak{p}(\sigma\theta)\mathfrak{P}(\theta s)$ kehrt aber, da die Integration über die ganze Kurve auszuführen ist, infolge der Stetigkeit von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{P}$ zum Ausgangswerte zurück, so daß er im Resultate wegfällt. Die Gleichungen (73) gehen in die folgenden über

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_\lambda(\sigma s) - \lambda \int \mathfrak{P}_\lambda(\theta s)\frac{d}{d\theta}\,\mathfrak{p}(\theta\sigma)\cdot d\theta &= \mathfrak{p}(s\sigma) \\ \mathfrak{P}_\lambda(\sigma s) - \lambda \int \mathfrak{p}(s\theta)\frac{d}{d\theta}\,\mathfrak{P}(\sigma\theta)\cdot d\theta &= \mathfrak{p}(s\sigma), \end{aligned} \tag{73a}$$

wobei nur vom Symmetriesatze $\mathfrak{p}(s\sigma) = \mathfrak{p}(\sigma s)$ Gebrauch gemacht wurde. Diese zwei Gleichungen haben mit den Gleichungen (73) eine auffallende Ähnlichkeit; ja, sie gehen aus (73) geradezu hervor, wenn ich in (73) statt

λ als Parameter $-\lambda$ nehme und den Buchstaben s durch σ, σ aber durch s ersetze. Die Funktion $\mathfrak{P}_{-\lambda}(s\sigma)$ würde also ebenfalls als eine Lösung der Integralgleichungen (73a) sich herausstellen. Nun ist aber bei allgemeinem λ die Lösung schon durch die eine der Integralgleichungen völlig eindeutig bestimmt, so daß wir also erhalten

$$\mathfrak{P}_{-\lambda}(s\sigma) = \mathfrak{P}_{\lambda}(\sigma s). \tag{74}$$

Dies ist das in Aussicht gestellte Symmetriegesetz. Wir können folglich den Satz aussprechen:*)

Die beiden Randfunktionen $\mathfrak{H}_{\lambda}(\sigma s)$ *und* $\mathfrak{H}_{-\lambda}(\sigma s)$ *sind Ableitungen ein und derselben Funktion* $\mathfrak{P}_{\lambda}(\sigma s)$ *und zwar ist*

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_{\lambda}(\sigma s) &= \frac{d}{d\sigma}\,\mathfrak{P}_{\lambda}(\sigma s) \\ \mathfrak{H}_{-\lambda}(\sigma s) &= \frac{d}{d\sigma}\,\mathfrak{P}_{\lambda}(s\sigma). \end{aligned} \tag{75}$$

Die Randfunktion $\mathfrak{P}_{\lambda}(\sigma s)$ *ist in* σ *und* s *auf dem ganzen Rande durchaus endlich eindeutig und stetig.*

Dies gibt uns zwischen den beiden Funktionen $\mathfrak{H}_{\lambda}(\sigma s)$ und $\mathfrak{H}_{-\lambda}(\sigma s)$ einen Zusammenhang von denkbar größter Einfachheit und gleichzeitig bekommen wir für die obige Fragestellung K. Neumanns eine Lösung elegantester Art. Für die Randwertaufgaben im Innengebiete und im Außengebiete haben wir $\lambda = +1$ bzw. $\lambda = -1$ einzusetzen. Die Funktion $\mathfrak{P}_1(\sigma s)$ wollen wir abkürzend mit $\mathfrak{P}(\sigma s)$ bezeichnen und können dann die Lösung für das Innengebiet und Außengebiet in folgender Form den Gleichungen (62a) S. 78 und (62b) gemäß wegen (75) aussprechen:

Sind irgendwelche wenigstens in Abteilungen stetige Randwerte $f(s)$ *gegeben, so nimmt das Potential des Innengebietes*

$$U(p) = \frac{1}{\pi}\int f(\sigma)\,\frac{d}{d\sigma}\left\{\operatorname{arctg}\frac{y_\sigma - y}{x_\sigma - x} - \pi\,\mathfrak{m}(\sigma) - \int \mathfrak{P}(\sigma\theta)\,\frac{d}{d\theta}\operatorname{arctg}\frac{y_\theta - y}{x_\theta - x}\,d\theta\right\} d\sigma \tag{76a}$$

am Innenrande die Werte $f(s)$ *an, das Potential des Außengebietes*

$$U(p) = -\frac{1}{\pi}\int f(\sigma)\,\frac{d}{d\sigma}\left\{\operatorname{arctg}\frac{y_\sigma - y}{x_\sigma - x} - \pi\,\mathfrak{m}(\sigma) + \int \mathfrak{P}(\theta\sigma)\,\frac{d}{d\theta}\operatorname{arctg}\frac{y_\theta - y}{x_\theta - x}\,d\theta\right\} d\sigma \tag{76b}$$

hat am Außenrande der Randkurve die Werte $f(s)$ *und ist im Unendlichen regulär. Die Randfunktion* $\mathfrak{P}(\sigma\theta)$ *ist in beiden Fällen dieselbe und ist durchaus endlich und stetig.*

Daß die Integrationsvariable σ nicht gerade der Kurvenbogen sein muß, ist augenfällig.

---

*) Dieses Symmetriegesetz, also die gleichzeitige Lösbarkeit des Randwertproblems für das Innen- und das Außengebiet durch eine einzige Funktion $\mathfrak{P}(\sigma s)$, ergab sich dem Verfasser bei seiner Untersuchung dieser Richtung im Jahre 1901. Mitgeteilt findet sich nur der daraus folgende Satz des nächsten Paragraphen in der kurzen Note: Sitz.-Ber. Ak. Wiss., Wien, 1903 Bd. 112, Abt. IIa S. 28.